ウイニング
詳細はここをクリック！

11 変域と変化の割合

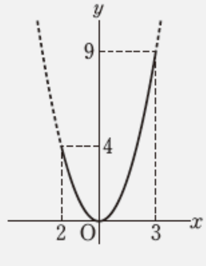
テーマ 5 関数$y=ax^2$と変域

練習≫p.104 1

xの変域に0がふくまれるときは，yの最小値または最大値は0である。

例題 関数$y=x^2$について，xの変域が$-2 \leqq x \leqq 3$のとき，yの変域を求めよ。

解説 関数$y=x^2$のグラフで，$-2 \leqq x \leqq 3$に対応する部分は，図の実線部分になる。グラフから，
xの値が増加するとき，$-2 \leqq x \leqq 0$では，yの値は4から0まで減少し，$0 \leqq x \leqq 3$では，yの値は0から9まで増加する。よって，yは，$x=0$のとき最小値0，$x=3$のとき最大値9をとる。
したがって，求めるyの変域は，$0 \leqq y \leqq 9$

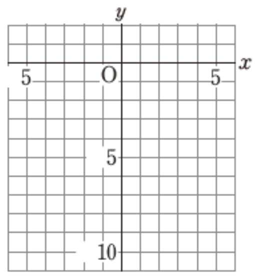


解答 $0 \leqq y \leqq 9$

1 関数$y=-\frac{1}{2}x^2$について，xの変域が$-4 \leqq x \leqq 2$のとき，次の問いに答えよ。

(1) この関数のグラフをかけ。

(2) yの変域を求めよ。



2 (1) 関数$y=2x^2$について，xの変域が次のとき，yの変域を求めよ。

① $-1 \leqq x \leqq 4$　② $-3 \leqq x \leqq -1$　③ $2 \leqq x \leqq 5$

(2) 関数$y=-\frac{1}{4}x^2$について，xの変域が次のとき，yの変域を求めよ。

① $-4 \leqq x \leqq 3$　② $-6 \leqq x \leqq -2$　③ $4 \leqq x \leqq 8$

3 関数$y=ax^2$について，xの変域が$-2 \leqq x \leqq 3$のとき，yの変域は$0 \leqq y \leqq 3$である。aの値を求めよ。

4 関数$y=\frac{2}{3}x^2$について，xの変域が$-3 \leqq x \leqq a$のとき，yの変域は$0 \leqq y \leqq 24$である。aの値を求めよ。

テーマ 6 変化の割合

»p.104 2

関数$y=ax^2$について，xの値がpからqまで増加するときの変化の割合は，

$$(\text{変化の割合})=\frac{(y\text{の増加量})}{(x\text{の増加量})}=\frac{aq^2-ap^2}{q-p}=\frac{a(q^2-p^2)}{q-p}=\frac{a(q+p)(q-p)}{q-p}=\boldsymbol{a(p+q)}$$

例題 **関数$y=\frac{1}{2}x^2$について，xの値が次のように増加するときの変化の割合を求めよ。**

(1)　2から4まで　　　　(2)　−3から−1まで

解説 (変化の割合)$=a(p+q)$に代入する。

(1)　$a=\frac{1}{2}$，$p=2$，$q=4$を代入すると，

変化の割合は，$\frac{1}{2}\times(2+4)=3$

(2)　$a=\frac{1}{2}$，$p=-3$，$q=-1$を代入すると，

変化の割合は，$\frac{1}{2}\times\{(-3)+(-1)\}=-2$

関数y　ax^2の変化の割合は一定ではない

解答 (1)　3　　(2)　−2

1　関数$y=\frac{1}{3}x^2$について，xの値が次のように増加するときの変化の割合を求めよ。

(1)　4から5まで　　　　(2)　−6から−3まで

2 (1)　関数$y=2x^2$について，xの値が次のように増加するときの変化の割合を求めよ。

①　1から3まで　　②　−4から−2まで　　③　−3から1まで

(2)　関数$y=4x^2$について，xの値が次のように増加するときの変化の割合を求めよ。

①　2から3まで　　②　−4から0まで　　③　−2から5まで

(3)　関数$y=-2x^2$について，xの値が次のように増加するときの変化の割合を求めよ。

①　−3から−1まで　　②　−2から4まで　　③　$\frac{1}{2}$から$\frac{5}{2}$まで

(4)　関数$y=-\frac{1}{2}x^2$について，xの値が次のように増加するときの変化の割合を求めよ。

①　2から6まで　　②　−5から−3まで　　③　−4から2まで

(5)　関数$y=\frac{3}{4}x^2$について，xの値が次のように増加するときの変化の割合を求めよ。

①　1から3まで　　②　−6から−2まで　　③　−3から1まで

テーマ 7 変化の割合の利用

»p.104 3

例題 **関数$y=ax^2$について，xの値が-4から-1まで増加するときの変化の割合は5である。aの値を求めよ。**

解説 xの値が-4から-1まで増加するときの変化の割合を，aの式で表すと，

$a\times\{(-4)+(-1)\}=-5a$ ←(変化の割合)$=a(p+q)$の公式に代入する

これが5と等しいから，$-5a=5$　$a=-1$

解答 $a=-1$

1 (1) 関数$y=ax^2$について，xの値が2から4まで増加するときの変化の割合は12である。aの値を求めよ。

(2) 関数$y=ax^2$について，xの値が-5から-3まで増加するときの変化の割合は4である。aの値を求めよ。

2 (1) xの値が-3から1まで増加するとき，2つの関数$y=3x^2$と$y=ax+1$の変化の割合は等しい。aの値を求めよ。

(2) xの値が-1から3まで増加するとき，2つの関数$y=ax^2$と$y=-6x+5$の変化の割合は等しい。aの値を求めよ。

3 (1) 関数$y=-2x^2$について，xの値がpから$p+1$まで増加するときの変化の割合は-4である。pの値を求めよ。

(2) 関数$y=\frac{1}{4}x^2$について，xの値がpから$p+2$まで増加するときの変化の割合は-3である。pの値を求めよ。

テーマ 8 平均の速さ

»p.104 4

$(\text{平均の速さ})=\dfrac{(\text{進んだ距離})}{(\text{かかった時間})}$

例題 **ある斜面でボールを転がしたとき，転がり始めてから x 秒間に転がる距離を y m とすると，$y=2x^2$ という関係が成り立つ。次の場合の平均の速さを求めよ。**

(1) 転がり始めて 2 秒後から 3 秒後までの間　　**(2) 転がり始めて 4 秒後から 5 秒後までの間**

解説 かかった時間は x の増加量，進んだ距離は y の増加量になっているから，「平均の速さを求める」ことは「変化の割合を求める」ことと同じである。

(1) 変化の割合は，$\underline{2\times(2+3)}=10$ ⟶ 平均の速さは 10 m/秒

(変化の割合)$=a(p+q)$の公式に代入する

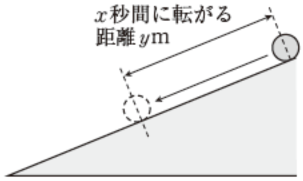
(2) 変化の割合は，$2\times(4+5)=18$ ⟶ 平均の速さは 18 m/秒

解答 (1) **10 m/秒**　　(2) **18 m/秒**

1 ある斜面でボールを転がしたとき，転がり始めてから x 秒間に転がる距離を y m とすると，$y=\dfrac{4}{3}x^2$ という関係が成り立つ。次の場合の平均の速さを求めよ。

(1) 転がり始めてから 3 秒後までの間　　(2) 転がり始めて 5 秒後から 7 秒後までの間

2 ボールが図の斜面を転がるとき，転がり始めてから x 秒間に転がる距離を y m とすると，y は x の 2 乗に比例し，転がり始めてから 2 秒間に転がる距離は 3 m である。



(1) y を x の式で表せ。

(2) 転がり始めてからの時間が次の場合の平均の速さを求めよ。

① 0.9 秒後から 1.1 秒後までの間　　② 2.8 秒後から 3.2 秒後までの間

3 物を落とすとき，落ち始めてから x 秒間に落ちる距離を y m とすると，y は x の 2 乗に比例し，落ち始めてから 3 秒間に落ちる距離は 44.1 m である。

(1) y を x の式で表せ。

(2) 落ち始めてからの時間が次の場合の平均の速さを求めよ。

① 1.4 秒後から 1.6 秒後までの間　　② 4.7 秒後から 5.3 秒後までの間

テーマ 9 放物線上の2点を通る直線の式

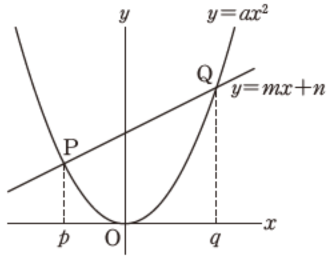
図のように，**放物線$y=ax^2$**と直線**$y=mx+n$**が2点P，Qで交わっており，P，Qのx座標をそれぞれp，qとすると，

直線の傾き…**$m=a(p+q)$** ⟵ $a\times$(2点のx座標の和)

直線の切片…**$n=-apq$** ⟵ $-1\times a\times$(2点のx座標の積)

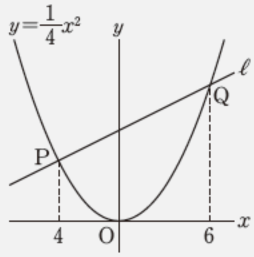
で求めることができる。

直線の傾きは，変化の割合と同じである。

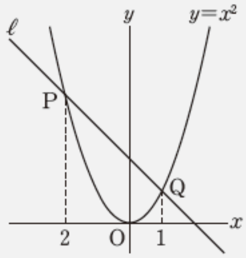


例題 次の図で，直線ℓの式を求めよ。

(1)



(2)



解説 直線ℓの式を$y=mx+n$とする。

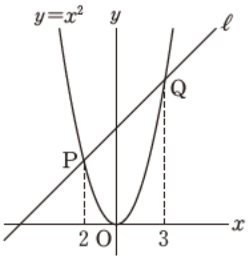
(1) $m=\dfrac{1}{4}\times\{(-4)+6\}=\dfrac{1}{2}$，$n=-\dfrac{1}{4}\times(-4)\times6=6$　よって，$y=\dfrac{1}{2}x+6$

(2) $m=1\times\{(-2)+1\}=-1$，$n=-1\times(-2)\times1=2$　よって，$y=-x+2$

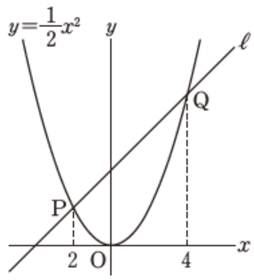
解答 (1) $\boldsymbol{y=\dfrac{1}{2}x+6}$　(2) $\boldsymbol{y=-x+2}$

次の図で，直線ℓの式を求めよ。

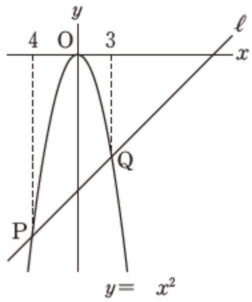
1 (1)



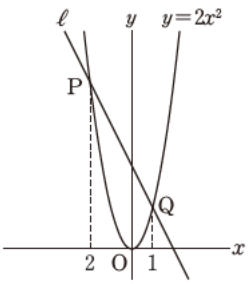
(2)



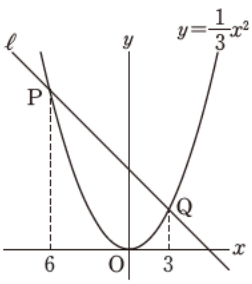
(3)



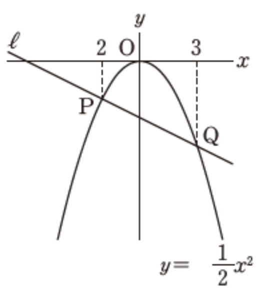
2 (1)



(2)



(3)

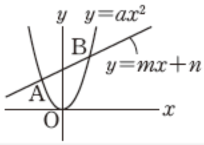


テーマ 10 放物線と直線の交点

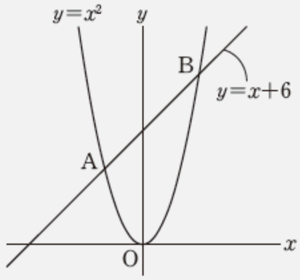
»p.104 5

放物線$y=ax^2$と直線$y=mx+n$の交点A，Bの座標は，

連立方程式$\begin{cases} y=ax^2 \\ y=mx+n \end{cases}$の解として求めることができる。



例題 **図のように，放物線$y=x^2$と直線$y=x+6$の交点をA，Bとするとき，2点A，Bの座標を求めよ。**



解説 連立方程式$\begin{cases} y=x^2 & \cdots① \\ y=x+6 & \cdots② \end{cases}$

①，②からyを消去すると，$x^2=x+6$　整理して，$x^2-x-6=0$

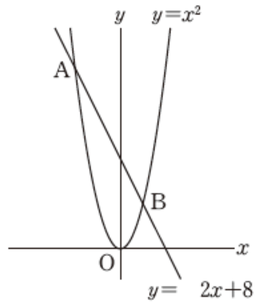
これを解くと，$(x+2)(x-3)=0$　　$x=-2$，$x=3$

$x=-2$のとき，$y=(-2)^2=4$だから，A$(-2,\ 4)$

$x=3$のとき，$y=3^2=9$だから，B$(3,\ 9)$

解答 A$(-2,\ 4)$，B$(3,\ 9)$

1　図のように，放物線$y=x^2$と直線$y=-2x+8$の交点をA，Bとするとき，2点A，Bの座標を求めよ。



2　次の式で表される放物線と直線の交点の座標を求めよ。

(1)　放物線$y=3x^2$，直線$y=-3x+6$

(2)　放物線$y=-2x^2$，直線$y=-4x-16$

(3)　放物線$y=\frac{1}{3}x^2$，直線$y=x+18$

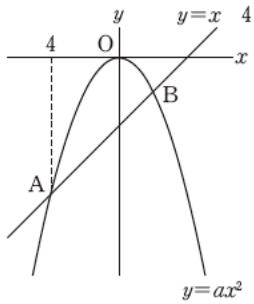
(4)　放物線$y=-\frac{1}{4}x^2$，直線$y=x-3$

3　図のように，放物線$y=ax^2$と直線$y=x-4$が2点A，Bで交わっており，点Aのx座標は-4である。

(1)　点Aのy座標を求めよ。

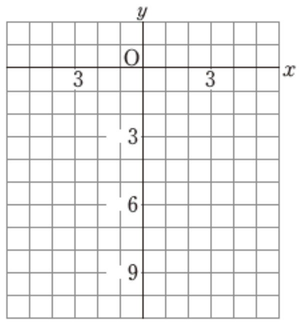
(2)　aの値を求めよ。

(3)　点Bの座標を求めよ。



練習問題

1 (1)　関数$y=-x^2$について，xの変域が$-3 \leqq x \leqq 2$のとき，この関数のグラフをかけ。また，yの変域を求めよ。



(2)　関数$y=3x^2$について，xの変域が次の①～③のとき，それぞれのyの変域を求めよ。

①　$-3 \leqq x \leqq 2$　　②　$4 \leqq x \leqq 8$　　③　$-5 \leqq x \leqq -1$

(3)　関数$y=ax^2$について，xの変域が$-6 \leqq x \leqq 4$のとき，yの変域が$-18 \leqq y \leqq 0$である。aの値を求めよ。

2 次の関数について，変化の割合を求めよ。

(1)　関数$y=2x^2$について，xの値が次のように増加するときの変化の割合

①　3から5まで　　②　-4から-1まで

(2)　関数$y=-\dfrac{1}{3}x^2$について，xの値が次のように増加するときの変化の割合

①　-6から-3まで　　②　1から5まで

3 (1)　関数$y=ax^2$について，xの値が2から6まで増加するときの変化の割合は4である。aの値を求めよ。

(2)　関数$y=ax^2$について，xの値が1から3まで増加するときの変化の割合は6である。この関数について，xの値が3から5まで増加するときの変化の割合を求めよ。

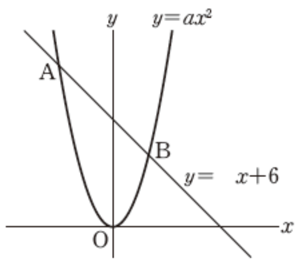
(3)　2つの関数$y=ax^2$と$y=3x$は，xの値が1から5まで増加するときの変化の割合が等しい。このとき，aの値を求めよ。

4 ある斜面でボールを転がしたとき，転がり始めてからx秒間に転がる距離をymとすると，$y=\dfrac{5}{2}x^2$の関係が成り立つ。次の場合の平均の速さを求めよ。

(1)　転がり始めてから2秒後までの間　　(2)　転がり始めて1.5秒後から2.5秒後までの間

(3)　転がり始めて4秒後から8秒後までの間

5 図のように，放物線$y=ax^2$と直線$y=-x+6$の交点をA，Bとするとき，点Aのx座標は-3である。



(1)　aの値を求めよ。

(2)　点Bの座標を求めよ。

実戦問題

1 (1)　関数$y=x^2$について，xの変域を$a \leqq x \leqq a+2$とするとき，yの変域が$0 \leqq y \leqq 4$となるようなaの値を，次のア～オの中からすべて選び，その記号を書け。〈埼玉〉

ア　-2　　イ　-1　　ウ　0　　エ　1　　オ　2

(2)　関数$y=ax^2$について，xの変域が$-6 \leqq x \leqq 3$のとき，yの変域は$b \leqq y \leqq 6$になる。a，bの値を求めよ。

(3)　2つの関数$y=ax^2$ $(a>0)$，$y=x+b$は，xの変域が$-2 \leqq x \leqq 4$のとき，yの変域が同じになる。a，bの値を求めよ。

2 関数$y=-\dfrac{3}{4}x^2$について，xの値が次のように増加するときの変化の割合を求めよ。

(1)　3から5まで　　(2)　-6から-4まで　　(3)　-2から1まで

3 (1)　$y=x^2$について，xがaから$a+5$まで増加するとき，変化の割合は7である。aの値を答えよ。〈新潟〉

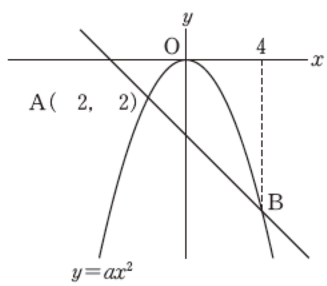
(2)　xの値が1から5まで増加するとき，2つの関数$y=ax^2$と$y=-3x+1$の変化の割合は等しい。aの値を求めよ。

(3)　xの値が-6から1まで増加するとき，関数$y=ax^2$の変化の割合が直線$y=-x+7$の傾きに等しい。この関数のxの値が4から6まで増加するときの変化の割合を求めよ。

4 (1)　ある自動車が動き始めてからx秒間に進んだ距離をymとすると，$0 \leqq x \leqq 8$の範囲では$y=\dfrac{3}{4}x^2$の関係があった。この自動車が動き始めて1秒後から3秒後までの平均の速さは毎秒何mか，求めよ。〈山口〉

(2)　ある斜面でボールを転がしたとき，転がり初めてからx秒間に転がる距離をymとすると，yはxの2乗に比例し，転がり始めてから4秒間に転がる距離は10mである。転がり始めて2.7秒後から2.9秒後までの間の平均の速さは毎秒何mか。

5 図のように，関数$y=ax^2$のグラフ上に点A$(-2,\ -2)$と点Bがあり，点Bのx座標は4である。〈佐賀〉



(1)　aの値を求めよ。

(2)　点Bのy座標を求めよ。

(3)　直線ABの式を求めよ。

強化学習 4 関数$y=ax^2$

代表例題 1 | 関数$y=ax^2$の式

yはxの2乗に比例し，$x=3$のとき$y=-18$である。

(1) yをxの式で表せ。

(2) $x=4$のときのyの値を求めよ。

(3) $y=-8$となるときのxの値を求めよ。

1 yはxの2乗に比例し，$x=-2$のとき$y=24$である。

(1) yをxの式で表せ。

(2) $x=-5$のときのyの値を求めよ。

(3) $y=54$となるときのxの値を求めよ。

2 yはxの2乗に比例し，$x=6$のとき$y=-9$である。

(1) yをxの式で表せ。

(2) $x=8$のときのyの値を求めよ。

(3) $y=-50$となるときのxの値を求めよ。

代表例題 2 | 変域

(1) 関数$y=3x^2$について，xの変域が$-2 \leqq x \leqq 1$のとき，yの変域を求めよ。

(2) 関数$y=ax^2$について，xの変域が$-4 \leqq x \leqq 3$のとき，yの変域が$-32 \leqq y \leqq 0$である。aの値を求めよ。

3 次の関数について，yの変域を求めよ。ただし，xの変域は(　)内の範囲とする。

(1) $y=2x^2$　$(-1 \leqq x \leqq 3)$

(2) $y=-3x^2$　$(1 \leqq x \leqq 3)$

(3) $y=4x^2$　$(-2 \leqq x \leqq 5)$

(4) $y=-5x^2$　$(2 \leqq x \leqq 4)$

(5) $y=\frac{1}{2}x^2$　$(-4 \leqq x \leqq -2)$

(6) $y=-\frac{1}{3}x^2$　$(-6 \leqq x \leqq 3)$

4 関数$y=ax^2$について，xの変域が$-3 \leqq x \leqq 2$のとき，yの変域が$-18 \leqq y \leqq 0$である。aの値を求めよ。

5 関数$y=2x^2$について，xの変域が$a \leqq x \leqq 5$のとき，yの変域は$8 \leqq y \leqq 50$である。aの値を求めよ。

6 関数$y=-\frac{1}{3}x^2$について，xの変域が$a \leqq x \leqq 3$のとき，yの変域は$-12 \leqq y \leqq b$である。a，bの値を求めよ。

代表例題 3 ｜ 変化の割合

(1) 関数$y=2x^2$について，xの値が次のように増加するときの変化の割合を求めよ。

① 1から4まで　　② 0から8まで　　③ -5から-1まで

(2) 関数$y=ax^2$について，xの値が3から5まで増加するときの変化の割合は2である。aの値を求めよ。

7 関数$y=3x^2$について，xの値が次のように増加するときの変化の割合を求めよ。

(1) 1から2まで　　(2) 3から4まで　　(3) -5から-2まで

8 関数$y=-\frac{1}{2}x^2$について，xの値が次のように増加するときの変化の割合を求めよ。

(1) 2から8まで　　(2) 0から4まで　　(3) -7から-3まで

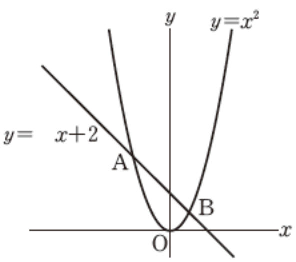
9 関数$y=ax^2$について，xの値が-3から-1まで増加するときの変化の割合は16である。aの値を求めよ。

10 関数$y=ax^2$について，xの値が2から7まで増加するときの変化の割合は3である。aの値を求めよ。

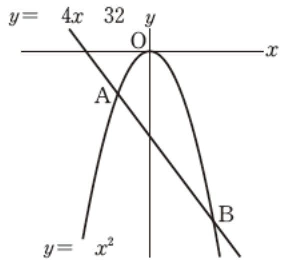
代表例題 4 ｜ 放物線と直線の交点

次の図で，2点A，Bの座標を求めよ。

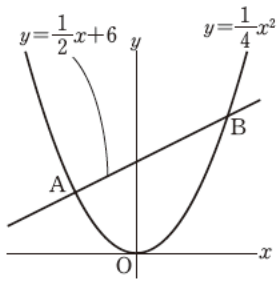
(1)



(2)

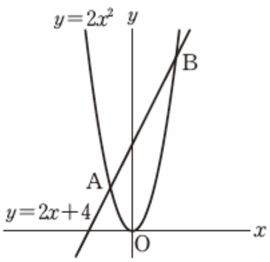


(3)

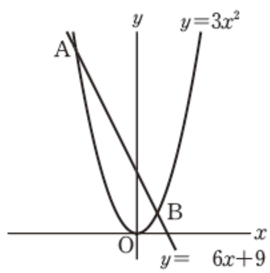


11 次の図で，2点A，Bの座標を求めよ。

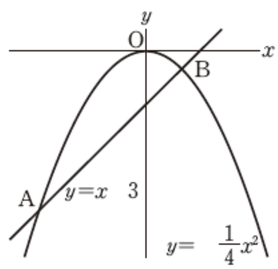
(1)



(2)



(3)



章のまとめ

／100点

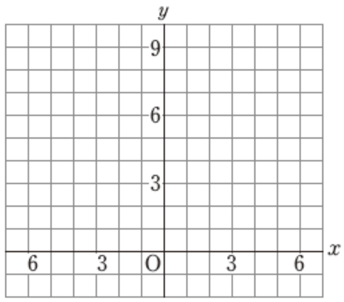
1 y は x の２乗に比例し，$x=5$ のとき $y=200$ である。 (18点－各６点)

(1) y を x の式で表せ。

(2) $x=-2$ のときの y の値を求めよ。

(3) $y=72$ となるときの x の値を求めよ。

2 関数 $y=\frac{1}{4}x^2$ について答えよ。 (18点－各６点)



(1) $y=\frac{1}{4}x^2$ のグラフをかけ。

(2) x の変域が $-4 \leqq x \leqq 6$ のときの y の変域を求めよ。

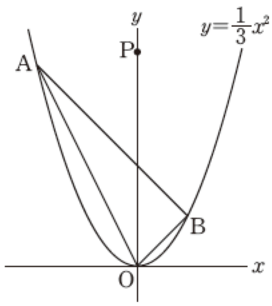
(3) グラフが(1)のグラフと x 軸について対称である関数の式を求めよ。

3 (1) 関数 $y=3x^2$ について，x の値が１から３まで増加するときの変化の割合を求めよ。

(16点－各８点)

(2) 関数 $y=ax^2$ について，x の値が２から７まで増加するときの変化の割合は -3 である。a の値を求めよ。

4 図で，点A，Bは関数 $y=\frac{1}{3}x^2$ のグラフ上の点で，x 座標はそれぞれ -6，３である。点Pは y 軸上の正の部分にある。 (24点－各８点)

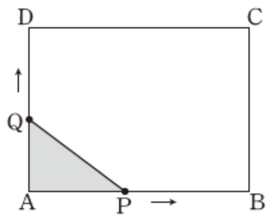


(1) △AOBの面積を求めよ。

(2) △AOB＝△POBのとき，点Pの座標を求めよ。

(3) 点Bを通り△AOBの面積を２等分する直線の式を求めよ。

5 AB＝8cm，AD＝6cmの長方形ABCDがある。点Pは辺AB上を点Aから点Bまで毎秒２cmの速さで動き，点Qは辺AD上を点Aから点Dまで毎秒1.5cmの速さで動く。２点P，Qが同時に点Aを出発してから x 秒後の△APQの面積を y cm² とする。(24点－各８点)



(1) y を x の式で表せ。

(2) x の変域を求めよ。

(3) y の変域を求めよ。

活用問題

運動会で，クラスの代表者４人が100ｍずつ走るクラス対抗リレーを行うことになった。リレーで勝つには効率よくバトンパスを行う必要があり，そのことで先生と陸人さんが話し合っている。

先生：リレーのランナーは決まったか？

陸人：うちのクラスからは，100ｍ走のタイムが同じ４人の速いランナーが選ばれました。

先生：そうか，それは良かった。でも，ひとりひとりが速いからといって，勝てるとは限らないのがリレーだぞ。

陸人：はい，そこで，効率よくバトンパスができるよう，くふうしようと思っています。

先生：それはいい考えだ。よし，それでは，バトンを渡す人をＡさん，受ける人をＢさんとし，２人が走るようすをグラフで表して考えることにしよう。

陸人：グラフですか。それにはxとyの関係を表す式をつくらないといけませんが，まず，２つの文字xとyをどうおくのでしょうか。

先生：Ｂさんがスタートしてからの時間をx秒，Ｂさんのスタート地点からの距離をyｍとする。４人とも，スタートしてからの２秒間でスムーズに加速し，２秒後からは走り終わるまで一定の速さで走れるから，$0 \leqq x \leqq 2$の範囲では，yはxの２乗に比例し，$x \geqq 2$の範囲では，yはxの１次関数になると考えてみよう。スタートしてから２秒間で８ｍ進み，２秒後からは秒速８ｍで走るのは計測済みだから，xとyの関係を表す式は求められるのではないかな。

陸人：はい，$0 \leqq x \leqq 2$のとき，$y=$ **ア** ……①，$x \geqq 2$のとき，$y=$ **イ** ……②です。

先生：合っているね。次に，Ａさんについての式が決まれば，２人のグラフの交点を求めることで，どのタイミングで，かつどの地点でバトンパスが行われるか求められるな。ＡさんがＢさんのスタート地点の６ｍ手前に来たときにＢさんがスタートすると，どうなるかな？ただし，バトンパスにかかる時間や減速，２人がのばす腕の長さのことは考えないことにしよう。

陸人：バトンパスを行う前のＡさんの速さは秒速８ｍだから，Ａさんの式は$y=$ **ウ** ……③です。バトンパスが行われるのはＢさんの加速中だから，①と③からyを消去して，xについての方程式をつくり，それを解くと，$0 \leqq x \leqq 2$だから，$x=$ **エ** ①に代入して，$y=$ **オ** よって，Ｂさんがスタートしてから **エ** 秒後，Ｂさんのスタート地点から **オ** ｍの地点で，バトンパスが行われるとわかります。ただ，これは効率よいバトンパスとはいえないと思います。

先生：そうだな。バトンパスが行われるときのＢさんの速さが遅いからな。これを速くするには，Ｂさんがスタートするときの２人の距離を６ｍからあと少し遠ざけるといいぞ。

陸人：10ｍだったらどうなるんだろう？

先生：10ｍだと，バトンパスができないぞ。

陸人：えっ，計算せずにわかるんですか？

(1) 上の会話文の中のア～オにあてはまる式または数を答えよ。

(2) Ｂさんがスタートするときの２人の距離が10ｍだとバトンパスができない理由を説明せよ。