3 因数分解(1)

ポイント ●整数がいくつかの自然数の積で表されるとき，そのひとつひとつの数をもとの数の**因数**という。 例 $15=3\times5$ から，3 と 5 は15の因数

● 2，3，5，7，…のように，それより小さい自然数の積で表せない自然数を**素数**という。

注 1 は素数ではない。

●素数である因数を**素因数**といい，自然数を素因数の積に分解することを**素因数分解**という。

例 $100=2\times2\times5\times5=2^2\times5^2$

例題 9 素因数分解

(1) 次の数を素因数分解せよ。

① 60

$=2\times2\times3\times5$

$=\mathbf{2^2\times3\times5}$

$$\begin{array}{r|l} 2 & 60 \\ 2 & 30 \\ 3 & 15 \\ & 5 \end{array}$$

② 294

$=2\times3\times7\times7$

$=\mathbf{2\times3\times7^2}$

$$\begin{array}{r|l} 2 & 294 \\ 3 & 147 \\ 7 & 49 \\ & 7 \end{array}$$

(2) 56にできるだけ小さい自然数をかけて，その結果をある自然数の平方にしたい。どんな数をかければよいか。また，その結果はどんな数の平方になるか。

解答 (2) ある自然数の平方になる数は，各素因数の指数が偶数になる。

56を素因数分解すると，$56=2^3\times7$ ← 素因数 2 と 7 の指数を偶数にすればよい

2×7 をかけると，$2^3\times7\times(2\times7)=2^4\times7^2=(2^2\times7)^2=28^2$

よって，**14をかけると28の平方になる。**

1 次の問いに答えよ。

(1) 30以下の素数をすべて書け。

(2) 次の数を素因数分解せよ。

① 42　② 132　③ 315

2 次の問いに答えよ。

(1) 96にできるだけ小さい自然数をかけて，その結果をある自然数の平方にしたい。どんな数をかければよいか。また，その結果はどんな数の平方になるか。

(2) 180をできるだけ小さい自然数でわって，その結果をある自然数の平方にしたい。どんな数でわればよいか。また，その結果はどんな数の平方になるか。

ポイント ●多項式をいくつかの因数の積として表すことを，その多項式を**因数分解する**という。

●多項式の各項に共通な因数があるとき，その因数を**共通因数**という。共通因数をかっこの外にくくり出すと，次のように因数分解することができる。

$$\boldsymbol{ma+mb=m(a+b)}$$

●各項に共通な因数を，残らずかっこの外にくくり出して因数分解する。

例題 10　共通因数

(1)　$ax-ay$
　$=\boldsymbol{a(x-y)}$　共通な因数 a をくくり出す

(2)　$4x^2-6xy$
　$=\boldsymbol{2x(2x-3y)}$　共通な因数 $2x$ をくくり出す

(3)　$6a^2b+3ab^2-9ab$
　$=\boldsymbol{3ab(2a+b-3)}$　3つの項に共通な因数 $3ab$ をくくり出す

1　次の式を因数分解せよ。

(1)　$ax+bx$　　(2)　$3ab+7a$　　(3)　$8x^2-3x$

(4)　$2ay-5by+8cy$　　(5)　$ax+bx-cx$　　(6)　$ab-9b+b^2c$

2　次の式を因数分解せよ。

(1)　$6a^2-12a$　　(2)　$15ab+5ac$　　(3)　$18y^2+27y$

(4)　$6x^2-15xy+3x$　　(5)　$21bx-14by+28b$　　(6)　$20a^2+8ab-16a$

3　次の式を因数分解せよ。

(1)　$4a^2b-8ab^2+14ab$　　(2)　$8x^2y-24xy^2+56xy$

(3)　$-3ax^2+15bx^2+21cx^2$　　(4)　$-20a^2b-35ab^2+25abc$

(5)　$8x^3+32x^2y-36x^2z$　　(6)　$12a^3b-48a^2c-60a^2d$

ポイント ●公式1′　$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$

例題 11　$x^2+(a+b)x+ab$ の因数分解①

(1)　x^2+5x+6 ← 積が6，和が5になる数は2と3

$=x^2+(2+3)x+2\times3$

$=(x+2)(x+3)$

(2)　$x^2-2x-15$ ← 積が-15，和が-2になる数は3と-5

$=x^2+\{3+(-5)\}x+3\times(-5)$

$=(x+3)(x-5)$

1　次の式を因数分解したとき，□にあてはまる数を求めよ。

(1)　$x^2+7x+12=(x+3)(x+\square)$　　(2)　$x^2-2x-8=(x+\square)(x-4)$

(3)　$x^2+3x-28=(x-\square)(x+\square)$　　(4)　$x^2-11x+30=(x-\square)(x-\square)$

2　次の式を因数分解せよ。

(1)　x^2+6x+8　　(2)　$x^2+10x+9$　　(3)　$x^2-7x+10$

(4)　$x^2-12x+35$　　(5)　x^2+8x-9　　(6)　$a^2-3a-10$

(7)　$x^2-11x+28$　　(8)　x^2-x-30　　(9)　$x^2+13x+36$

(10)　$y^2-15y+54$　　(11)　$a^2-14a+45$　　(12)　$x^2+8x-20$

(13)　$m^2+15m+56$　　(14)　x^2+x-2　　(15)　x^2-x-72

3　次の式を因数分解せよ。

(1)　$x^2+19x+60$　　(2)　$a^2+5a-84$　　(3)　$x^2-5x-66$

(4)　$x^2+27x+180$　　(5)　$y^2-21y+110$　　(6)　$x^2-x-110$

ポイント ●下の例題のように，文字を 2 つふくむ式の因数分解も，公式①′を使って因数分解できる。

例題 12 $x^2+(a+b)x+ab$ **の因数分解②**

(1) $x^2+9xy+20y^2$

$=x^2+(4y+5y)x+4y\times5y$

$=\boldsymbol{(x+4y)(x+5y)}$

$x^2+\underbrace{9y}_{a+b}x+\underbrace{20y^2}_{ab}$

積が $20y^2$，和が $9y$ になる 2 つの式は $4y$ と $5y$

(2) $x^2-4xy-12y^2$

$=x^2+\{2y+(-6y)\}x+2y\times(-6y)$

$=\boldsymbol{(x+2y)(x-6y)}$

$x^2\underbrace{-4y}_{a+b}x\underbrace{-12y^2}_{ab}$

積が $-12y^2$，和が $-4y$ になる 2 つの式は $2y$ と $-6y$

1 次の式を因数分解したとき，$\boxed{}$ にあてはまる式を求めよ。

(1) $x^2+9xy+18y^2=(x+3y)(x+\boxed{})$

(2) $x^2+4xy-32y^2=(x-4y)(x+\boxed{})$

(3) $x^2-12xy+35y^2=(x-\boxed{})(x-\boxed{})$

(4) $x^2-xy-30y^2=(x+\boxed{})(x-\boxed{})$

2 次の式を因数分解せよ。

(1) $x^2+12xy+20y^2$

(2) $x^2+8xy+15y^2$

(3) $x^2+14xy+48y^2$

(4) $x^2-6xy-16y^2$

(5) $x^2-4xy+3y^2$

(6) $x^2+xy-12y^2$

(7) $a^2+ab-6b^2$

(8) $a^2+8ab+7b^2$

(9) $m^2-3mn-28n^2$

(10) $x^2+20xy+75y^2$

(11) $a^2-11ab-80b^2$

(12) $x^2-28xy+96y^2$

3 次の式を因数分解せよ。

(1) $17x+x^2+72$

(2) $-36+a^2+5a$

(3) $x^2+24-11x$

(4) $20y^2+x^2-9xy$

(5) $7ab+6b^2+a^2$

(6) $-27y^2+x^2-6xy$

練習問題

1　次の問いに答えよ。 ➡例題 9

(1)　次の数を素因数分解せよ。

①　90　　②　128　　③　360

(2)　560にできるだけ小さい自然数をかけて，その結果をある自然数の平方にしたい。どんな数をかければよいか。

2　次の式を因数分解せよ。 ➡例題10

(1)　$xy-x$　　(2)　m^2-mn　　(3)　$6x^2-9xy$

(4)　$15ax-20ay+10a$　　(5)　$4x^2y-8xy^2+2xy$　　(6)　$16p^2q-4pq^2-8pq$

3　次の式を因数分解せよ。 ➡例題11，12

(1)　$x^2+11x+28$　　(2)　$x^2+7x-18$　　(3)　$x^2-12x+32$

(4)　x^2-x-56　　(5)　$x^2+4x-45$　　(6)　$a^2+11a+10$

(7)　$x^2+4x-21$　　(8)　$y^2-13y+12$　　(9)　x^2-x-20

(10)　$x^2+12xy+27y^2$　　(11)　$m^2-9mn+14n^2$　　(12)　$a^2+3ab-4b^2$

(13)　$a^2-2ab-48b^2$　　(14)　$x^2+2xy-15y^2$　　(15)　$x^2-10xy+24y^2$

4　次の$\boxed{}$にあてはまる数や式を求めよ。 ➡例題11，12

(1)　$x^2+\boxed{ア}x+12=(x+2)(x+\boxed{イ})$　　(2)　$x^2-4xy-\boxed{ア}=(x+\boxed{イ})(x-8y)$

実戦問題

1 次の問いに答えよ。

(1) 84を素因数分解せよ。

(2) $\dfrac{455}{n+2}$ が自然数となるような素数 n の値をすべて求めよ。

(3) n は250以下の自然数で，$\dfrac{n}{21}$ をこれ以上約分できない分数にしたとき，分母が 3 になる。また，$14n$ は，ある自然数の 2 乗になるという。このような n の値をすべて求めよ。

2 次の式を因数分解せよ。

(1) $3x^2y-9xy^2$

(2) $-12a^3b^2c+6a^2bc-9ac$

(3) $x^2-19x+48$

(4) $x^2+7x+10$ 〈佐賀〉

(5) x^2-6x+8 〈沖縄〉

(6) x^2-x-12 〈岩手〉

(7) $x^2-4x-21$ 〈鳥取〉

(8) $2x-15+x^2$

(9) $-8y^2+x^2-2xy$

(10) $a^2-19a-150$

3 次の問いに答えよ。

(1) 次の $\boxed{}$ にあてはまる数を求めよ。

① $x^2-8x-\boxed{ア}=(x+2)(x-\boxed{イ})$

② $x^2-7xy+\boxed{ア}y^2=(x-\boxed{イ}y)(x-4y)$

難(2) x の 2 次式 $x^2-mx-18$ が，$(x+a)(x+b)$ (a，b は整数)の形に因数分解できるときの自然数 m の値をすべて求めよ。